PART3　2次方程式の解の存在範囲（少なくとも１つ）

3　2 次方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$ が $-2<x<0$ に少なくとも 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

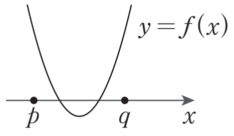
2 次方程式 $f(x)=0$ が $p<x<q$ に少なくとも 1 つの実数解をもつときは以下

(i)　$p<x<q$ に 2 つの解（重解含む）をもつ

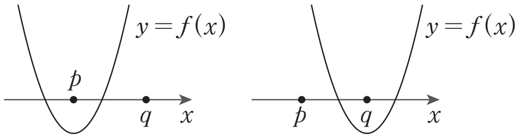
(ii)　$p<x<q$ に一方の解をもち，$x<p$ または $q<x$ にもう一方の解をもつ

(iii)　$p<x<q$ に一方の解をもち，もう一方の解が $x=p$ または $x=q$ である

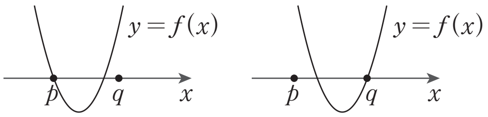
(i)



(ii)



(iii)



第 7 講　PART3　確認問題

1　2 次方程式 $x^2-2ax-2a+3=0$ が $0<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。
選択肢は最も適切なものを選べ。

$f(x)=x^2-2ax-2a+3$ とおくと，2 次方程式 $f(x)=0$ が $0<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつのは，次の(i)～(iv)の 4 つの場合が考えられる。

(i)　異なる 2 つの実数解または重解が $0<x<2$ の範囲にあるとき
このとき，次の[Ⅰ]～[Ⅲ]が同時に成り立つ。

[Ⅰ]　$f(x)=0$ の判別式 D について [ア]

[Ⅱ]　$y=f(x)$ のグラフの軸は，[イ] の範囲にある。

[Ⅲ]　範囲の端点を考えると [ウ]

(ii)　2 つの解のうち，一方が $0<x<2$ にあり，もう一方が $x<0$ または $2<x$ にあるとき
このとき，[エ] が成り立つ。

(iii)　解の 1 つが $x=0$ のとき
このとき，$a=$ [オ] で，$f(x)=0$ は $0<x<2$ に [カ]。

(iv)　解の 1 つが $x=2$ のとき
このとき，$a=$ [キ] で，$f(x)=0$ は $0<x<2$ に [ク]。

(i)～(iv)より，求める定数 a の値の範囲は [ケ]

[ア の選択肢]

① $D<0$　② $D\leqq 0$　③ $D=0$

④ $D>0$　⑤ $D\geqq 0$

[イ の選択肢]

① $x>0$　② $x\geqq 0$　③ $x<2$　④ $x\leqq 2$

⑤ $0<x<2$　⑥ $0\leqq x\leqq 2$

[ウ , エ の選択肢]

① $f(0)<0$ かつ $f(2)<0$

② $f(0)<0$ または $f(2)<0$

③ $f(0)>0$ かつ $f(2)>0$

④ $f(0)>0$ または $f(2)>0$

⑤ $f(0)\cdot f(2)<0$　⑥ $f(0)\cdot f(2)>0$

⑦ $f(0)\cdot f(2)\leqq 0$　⑧ $f(0)\cdot f(2)\geqq 0$

[オ , キ の選択肢]

① 0　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{7}{6}$

④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2　⑥ 3

[カ , ク の選択肢]

① 解を１つもち，条件を満たす

② 解をもたず，不適

[ケ の選択肢]

① $a\leqq -3,\ 1\leqq a$　② $a\geqq\frac{7}{6}$

③ $1\leqq a<\frac{7}{6}$　④ $1\leqq a<\frac{3}{2}$

⑤ $\frac{7}{6}<a<\frac{3}{2}$　⑥ $\frac{7}{6}\leqq a<\frac{3}{2}$

[MEMO]

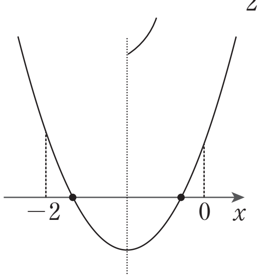
PART3　2次方程式の解の存在範囲（少なくとも 1 つ）

3　2 次方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$ が $-2<x<0$ に少なくとも 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2+(a+2)x-a+1$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=-\dfrac{a+2}{2}$ である。また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とする。

$f(-2)=(-2)^2+(a+2)\cdot(-2)-a+1=-3a+1$，$f(0)=-a+1$

(i)　異なる 2 つの実数解または重解が $-2<x<0$ にあるとき



$D\geqq 0$ より

$$(a+2)^2-4\cdot 1\cdot(-a+1)\geqq 0$$

$a^2+8a\geqq 0$　よって　$a\leqq -8$，$0\leqq a$ …… ①

軸 $x=-\dfrac{a+2}{2}$ について

$$-2<-\frac{a+2}{2}<0$$

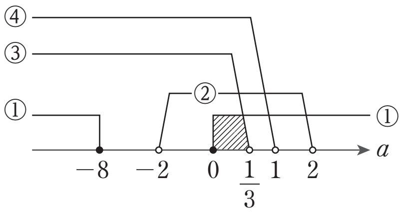
よって　$-2<a<2$ …… ②

$f(-2)>0$ より

$-3a+1>0$　　よって　$a<\dfrac{1}{3}$ …… ③

$f(0)>0$ より

$-a+1>0$　　よって　$a<1$ …… ④



①～④より $0\leqq a<\dfrac{1}{3}$

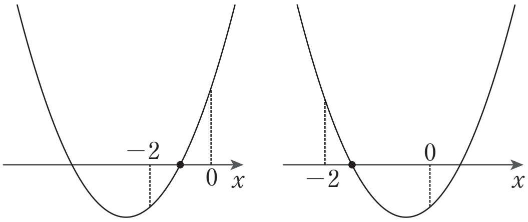
(ii)　2 つの解のうち一方が $-2<x<0$ にあり，もう一方の解が $x<-2$ または $0<x$ にあるとき

$f(-2)\cdot f(0)<0$ より

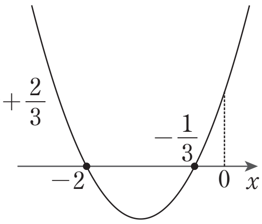
$$(-3a+1)(-a+1)<0$$

$$(3a-1)(a-1)<0$$

よって　$\dfrac{1}{3}<a<1$



(iii)　解の１つが $x=-2$ のとき



$f(-2)=0$　より　$-3a+1=0$

よって　$a=\frac{1}{3}$

このとき

$$f(x)=x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(3x^2+7x+2\right)$$

$$=\frac{1}{3}(3x+1)(x+2)$$

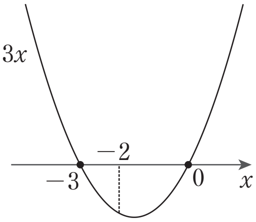
より，２次方程式 $f(x)=0$ の解は　$x=-\frac{1}{3}$，-2

よって，$-2<x<0$ に解を１つもち，条件を満たす。

(iv)　解の１つが $x=0$ のとき

$f(0)=0$　より　$-a+1=0$　　よって　$a=1$

このとき



$$f(x)=x^2+3x=x(x+3)$$

より，２次方程式 $f(x)=0$ の解は　$x=0$，-3

よって，$-2<x<0$ に解をもたず，不適。

(i)～(iv)より，求める a の値の範囲は　$0\leqq a<1$

第7講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：⑤，イ：⑤，ウ：③，エ：⑤，オ：④，
カ：②，キ：③，ク：①，ケ：④

[解説]

$f(x)=x^2-2ax-2a+3$ とおくと

$$f(x)=x^2-2ax-2a+3$$
$$=(x-a)^2-a^2-2a+3$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=a$ である。

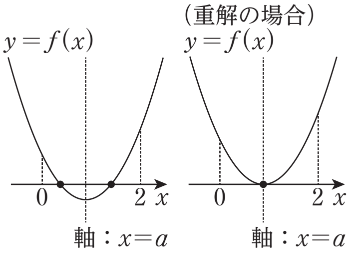
2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(-2a+3)=a^2+2a-3$$

また　$f(0)=-2a+3$

$$f(2)=2^2-2a\cdot2-2a+3=-6a+7$$

(i)　異なる2つの実数解または重解が $0<x<2$ の範囲にあるとき [A]



［Ⅰ］　**$D\geqq0$** より　$a^2+2a-3\geqq0$

$$(a+3)(a-1)\geqq0$$

よって　$a\leqq-3$，$1\leqq a$　……(あ)

［Ⅱ］　軸 $x=a$ は **$0<x<2$ の範囲にある**から

$$0<a<2 \quad ……(い)$$

［Ⅲ］　**$f(0)>0$ かつ $f(2)>0$** である。

$f(0)>0$ より　$-2a+3>0$

[A]　2次方程式 $f(x)=0$ が $p<x<q$ に少なくとも1つの実数解をもつときは以下の通り。
[1]　$p<x<q$ に2つの解(重解含む)をもつ
[2]　$p<x<q$ に一方の解をもち，$x<p$ または $q<x$ にもう一方の解をもつ
[3]　$p<x<q$ に一方の解をもち，もう一方の解が $x=p$ または $x=q$ である
[3]は，$x=p$ または $x=q$ を解にもつとき，それぞれもう一方の解を求め，もう一方の解が $p<x<q$ の範囲にあるかを確認する。

よって　$a<\dfrac{3}{2}$　……(う)

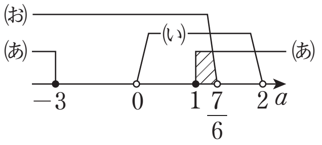
$f(2)>0$ より　$-6a+7>0$

よって　$a<\dfrac{7}{6}$　……(え)

(う)かつ(え)より　$a<\dfrac{7}{6}$　……(お)

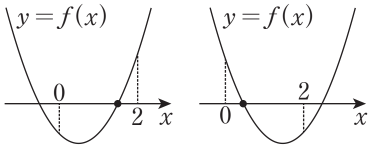
(あ), (い), (お)の共通範囲を求めて

$1\leqq a<\dfrac{7}{6}$



(ii)　2 つの解のうち，一方が $0<x<2$ にあり，

もう一方が $x<0$ または $2<x$ にあるとき



$f(0)\cdot f(2)<0$ より　$(-2a+3)(-6a+7)<0$

$(2a-3)(6a-7)<0$

よって　$\dfrac{7}{6}<a<\dfrac{3}{2}$

(iii)　解の 1 つが $x=0$ のとき

$f(0)=0$ より　$-2a+3=0$　　よって　$a=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

このとき

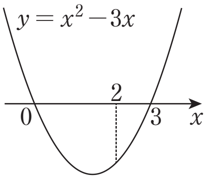
$$f(x)=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x-2\cdot\frac{3}{2}+3$$

$$=x^2-3x=x(x-3)$$

よって，2 次方程式 $f(x)=0$ の解は　$x=0$，3

ゆえに，$0<x<2$ に

解をもたないから，不適。



(iv)　解の１つが $x=2$ のとき

$f(2)=0$ より　$-6a+7=0$　　よって　$a=\dfrac{7}{6}$

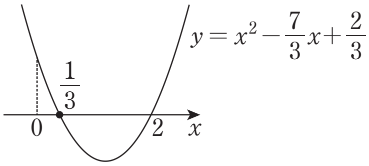
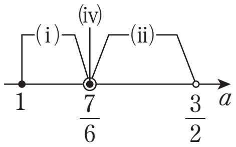
このとき

$$f(x)=x^2-2\cdot\frac{7}{6}x-2\cdot\frac{7}{6}+3$$
$$=x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{3}(3x^2-7x+2)$$
$$=\frac{1}{3}(x-2)(3x-1)$$

よって，２次方程式 $f(x)=0$ の解は

$$x=2,\ \frac{1}{3}$$

ゆえに，$0<x<2$ に**解を１つもつから，条件を満たす。**



(i)〜(iv)より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{1\leqq a<\dfrac{3}{2}}$